УДК 51-72

ДВИЖЕНИЕ РАВНОМЕРНО ИСПАРЯЮЩЕЙСЯ КАПЛИ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ДЕЙСТВИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ И ДВУХ РАЗЛИЧНЫХ СИЛ СОПРОТИВЛЕНИЯ

Спиглазова А. С., Мезенцев А. В.

Уральский государственный университет путей сообщения, Екатеринбург, Россия
anut.spi@mail.ru, amezentsev@usurt.ru

Аннотация. В работе с помощью дифференциального уравнения моделируется падение в воздухе испаряющейся капли жидкости при двух различных предположениях относительно силы сопротивления воздуха. В первом случае предполагается, что сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли, во втором предполагается, что сила сопротивления пропорциональна произведению скорости и площади поверхности капли. С использованием пакета Mathcad проводится сравнение полученных решений и анализ особенностей в аналитических выражениях при различных соотношениях между скоростью испарения и коэффициентом пропорциональности для силы сопротивления.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение, движение тела переменной массы, уравнение Мещерского.

THE MOTION OF A UNIFORMLY EVAPORATING LIQUID DROP TAKING INTO ACCOUNT THE ACTION OF GRAVITY AND TWO DIFFERENT DRAG FORCES

Spiglazova A.S., Mezentsev A.V.

Ural State University of Railway Transport, Yekaterinburg, Russia

Abstract. In this paper, a differential equation is used to model the fall of an evaporating liquid drop in the air under two different assumptions about the air resistance force. In the first case it is assumed that the resistance force is proportional to the speed drops, the second it is assumed that the resistance force is proportional to the product of speed and surface area of the droplet. Using the Mathcad package, the obtained solutions are compared and the features are analyzed in analytical expressions for different relations between the evaporation rate and the coefficient of proportionality for the resistance force.

Key words: the differential equation, motion of a body with variable mass,

Meshchersky's equation.

Введение.

Для описания движения тел переменной массы используются дифференциальное уравнение Мещерского [1]. Подробный вывод этого уравнения для материальной точки переменной массы и решение задач, иллюстрирующих его применение можно найти в курсе теоретической механики [1].

В предположении, что абсолютная скорость отделяющихся частиц равна нулю, уравнение Мещерского имеет вид [1]:

$$\frac{d}{dt}\left(M\mathbf{v}\right)=\mathbf{F}, \tag{1}$$

где $M = M\,(t)$ — масса материальной точки переменной массы, изменяющейся за счет обмена частицами с окружающей средой, $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ — скорость движения материальной точки переменной массы, $\mathbf{F}$ — результирующая внешних сил, действующих на материальную точку переменной массы.

Рассмотрим применение этого уравнения для моделирования падения в воздухе испаряющейся капли жидкости при двух различных предположениях относительно силы сопротивления [2]. В первом случае будем предполагать, что сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости движения капли, во втором — пропорциональна произведению скорости и площади поверхности капли. Дополнительно предполагается, что во все моменты времени капля жидкости сохраняет форму шара. Для определения зависимости скорости движения капли от времени составим дифференциальные уравнения, которые решим аналитическими методами.

С использованием пакета Mathcad приведем сравнение решений, полученных при различных условиях на силу сопротивления, и исследуем поведение функции в окрестности точки разрыва.

Постановки задач и решения

1. Капля воды, имеющая начальную массу M_0 г., равномерно испаряющаяся со скоростью m г/с, свободно падает в воздухе. Сила сопротивления пропорциональна скорости движения капли (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения капли от времени, протекшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равнялась нулю. Будем считать, что $k \neq 2m$.

Пусть $M = M(t)$ — переменная масса капли, $v = v(t)$ — ее скорость, $v_0 = 0$ —

начальная скорость равна нулю; g — ускорение свободного падения. Учитывая равномерную скорость испарения m, имеем $M(t) = M_0 - mt > 0$, $M'(t) = -m$. Сила сопротивления среды пропорциональна скорости капли $F_{сопр} = kv$, где k — коэффициент пропорциональности. Запишем закон движения материальной точки переменной массы (1): $M'v + Mv' = Mg - F_{сопр}$.

С учетом введенных обозначений получим дифференциальное уравнение

$$(k-m)v + \left(M_0 - mt\right)v' = \left(M_0 - mt\right)g. \qquad (2)$$

Для решения линейного дифференциального уравнения применим метод Бернулли [3]. Учитывая ограничение $k \neq 2m,$ т.е. $\left(1 - k/m\right) \neq \left(1 - 2m/m\right) = -1,$ после интегрирования получим

$$v = -\frac{g}{2m-k}(M_0 - mt) + C(M_0 - mt)^{-1+\frac{k}{m}}, \qquad (3)$$

Определим константу интегрирования C:

$$v(0) = -\frac{gM_0}{2m-k} + C M_0^{-1+\frac{k}{m}} = 0, \qquad C = \frac{g}{2m-k} M_0^{2-\frac{k}{m}}.$$

Подставим, полученное выражение в (3)

$$v = -\frac{g}{2m-k}(M_0 - mt) + \frac{g}{2m-k} M_0^{2-\frac{k}{m}} (M_0 - mt)^{-1+\frac{k}{m}}.$$

После преобразований получим

$$v = \frac{g}{2m-k}(M_0 - mt)\left[\left(1 - \frac{m}{M_0}t\right)^{\frac{k}{m}-2} - 1\right].$$

Проведем расчеты по полученной формуле с использованием пакета Mathcad [4]. В качестве начальных данных возьмем: начальную массу $M_0 = 1$(г), начальную скорость $v_0 = 0$(см/с). Скорость испарения примем равной $m = 0{,}01$ (г/с), коэффициент пропорциональности для силы сопротивления возьмем равным $k = 0{,}1$. Плотность воды $\gamma = 1$ (г/см^3), ускорение свободного падения $g = 9.8 \cdot 10^2$ (см/с^2).

Отметим, что вид графиков для функций $v(t)$ и $f(t)$ зависит от соотношений чисел k и m. Построим графики зависимостей скорости от времени.

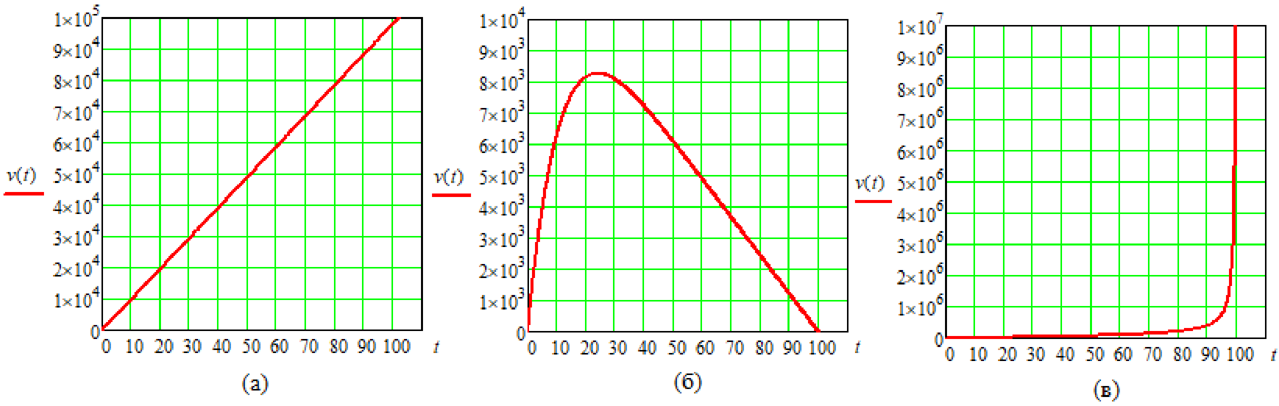

Рисунок 1 – Графики скорости $v(t)$ (а) – при $k = m$, (б) – при $k > 2m$, (в) – при $k < 2m,\ k \neq m$

При $к = m$ получается линейная зависимость. При $k > 2m$ скорость испаряющейся капли быстро возрастает и достигает максимального значения $v_{max} = 8273.8$ (см/ с) = 82.74 (м/с) в момент времени $t = 24$ (с). Затем до момента времени $t = 100$ (с) плавно убывает до нуля. В этот момент времени масса капли становится равной нулю. При $k < 2m,\ k \neq m$ появляется разрыв 2-го рода в точке $t = M_0 / m$.

Решим ту же задачу для случая, когда сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли на площадь ее поверхности, предполагая, что во все моменты времени капля имеет сферическую форму. Сравним полученные решения.

2. Капля воды сферической формы, имеющая начальную массу M_0 г., равномерно испаряется со скоростью m г/с и свободно падает в воздухе. Сила сопротивления воздуха пропорциональна произведению скорости капли на площадь ее поверхности (коэффициент пропорциональности равен k). Найти зависимость скорости движения капли от времени, протекшего с начала падения капли, если в начальный момент времени скорость капли равнялась нулю. Будем считать, что $k \neq 2m$.

В этом случае сила сопротивления среды имеет вид $F_{сопр} = kv4\pi R^2$, где k — коэффициент пропорциональности. Запишем закон движения материальной точки переменной массы (1)

$$M'v + Mv' = Mg - F_{сопр}\ .$$

С учетом введенных обозначений получим линейное дифференциальное уравнение $-mv + Mv' = Mg - kv4\pi R^2$. Преобразуем полученное уравнение

$$(k4\pi R^2 - m)v + Mv' = Mg. \tag{4}$$

Выразим радиус капли R через ее массу и плотность:

$$M=\gamma V=\gamma\cdot\frac{4}{3}\pi R^3 \quad\Rightarrow\quad R^3=\frac{3M}{4\gamma\pi} \quad\Rightarrow\quad R=\sqrt[3]{\frac{3M}{4\gamma\pi}}.$$

Имеем $R^2=\sqrt[3]{\frac{9M^2}{16\gamma^2\pi^2}}$. Подставим полученное для R^2 выражение в уравнение (4).

$$\left(k4\pi\cdot\sqrt[3]{\frac{9M^2}{16\gamma^2\pi^2}}-m\right)v+Mv'=Mg. \tag{5}$$

Для упрощения записи введем обозначение $k_1=k\cdot\sqrt[3]{36\pi/\gamma^2}$. Уравнение (5) перепишем в виде

$$\left(k_1M^{\frac{2}{3}}-m\right)v+Mv'=Mg. \tag{6}$$

Для решения линейного дифференциального уравнения (6) применим метод Бернулли [3]. После интегрирования получим

$$v=\frac{g}{M_0-mt}\cdot e^{\frac{3k_1}{2m}\cdot(M_0-mt)^{2/3}}\int_0^t(M_0-mt)\cdot e^{-\frac{3k_1}{2m}\cdot(M_0-mt)^{2/3}}dt. \tag{7}$$

Полученная формула (7) имеет особенность при $t=M_0/m=100$ (разрыв 2-го рода) [3]. Проведем расчеты по полученной формуле. В качестве начальных данных возьмем такие же значения, как и для первого случая. Расчеты проведем до момента времени t = 100 (с), когда масса капли становится нулевой. В результате расчетов получено, что скорость испаряющейся капли быстро возрастает и достигает максимального значения $v_{\max}$ = 1998.6 (см/ с) в момент времени t = 10.23 (с). Затем плавно убывает и достигает минимального значения $v_{\min}$ = 771.89 (см/ с) в момент времени t = 98.89 (с).

	$v(t)$	$M(t)$ (г.)	$R(t)$ (см.)
t = 0	0	1	0.620
t = 10	1998.38	0.9	0.599
t = 20	1942.25	0.8	0.576
t = 30	1863.34	0.7	0.551
t = 90	1068.68	0.1	0.288
t = 99	772.93	0.01	0.134
t = 99.9	1530	0.001	0.062
t =99.99	9000.08	0.0001	0.029

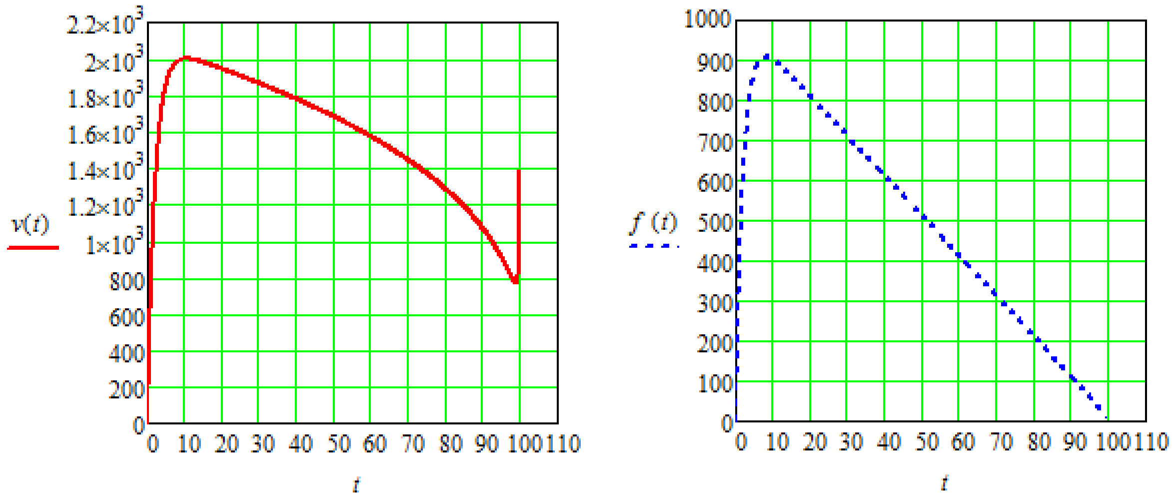

Рисунок 2 – Графики скорости $v(t)$ и силы сопротивления $f(t)$

Сравнение и анализ полученных формул

Для сравнения приведем графики зависимостей скоростей, посчитанных при одних и тех же начальных данных, для первого и второго случая.

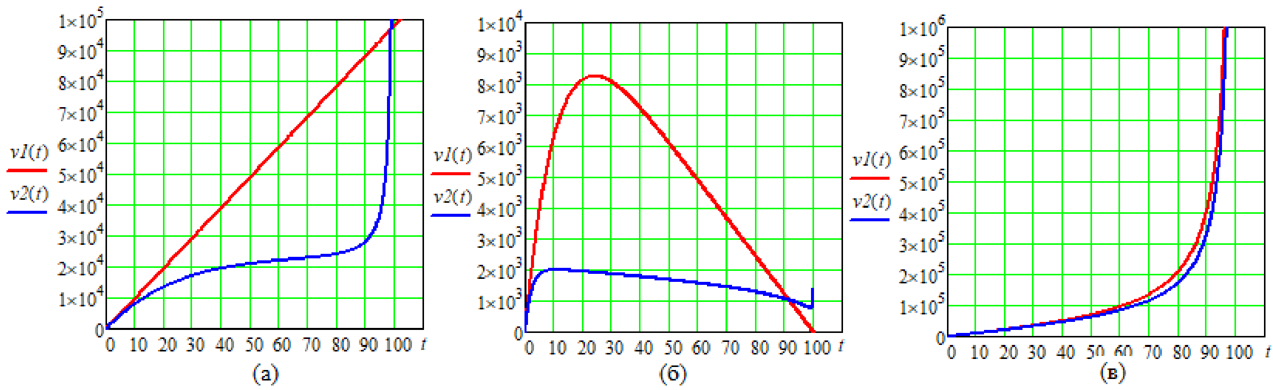

Рисунок 3 – Графики скоростей $v1(t)$ и $v2(t)$ (а) при $k = m$=0,01; (б) при $k > 2m$, (k = 0,1; m = 0,01); (в) при $k < 2m$, $k \neq m$ (k = 0,001; m = 0,01)

При $к = m$ (рис. 3а) скорость капли в первом случае линейно возрастает, во втором случае возрастает на всем промежутке от 0 до 100.

При k > $2m$ (рис. 3б) скорость капли в обоих случаях вначале быстро возрастает, достигает максимального значения, а затем убывает. При этом максимальное значение скорости капли во втором случае достигается раньше (рис. 3б). Во втором случае скорость капли убывает не до нуля.

При $k < 2m$, $k \neq m$ (рис. 3в) в обоих случаях появляется разрыв 2-го рода в точке $t = M_0 / m$.

При приближении к моменту времени $t = M_0 / m$ скорость капли во втором случае начинает неограниченно возрастать.

Библиографический список

1. Космодемьянский А.А. Курс теоретической механики. Ч. 2. М.: Просвещение, 1966.
2. Берман Г.Н. Сборник задач по курсу математического анализа: учебное пособие. СПб.: Лань, 2019.
3. Мышкис А.Д. Математика для технических ВУЗов. Специальные курсы: учебное пособие. СПб.: Лань, 2009.
4. Охорзин, В.А. Прикладная математика в системе MATHCAD: учебное пособие. СПб.: Лань, 2009.